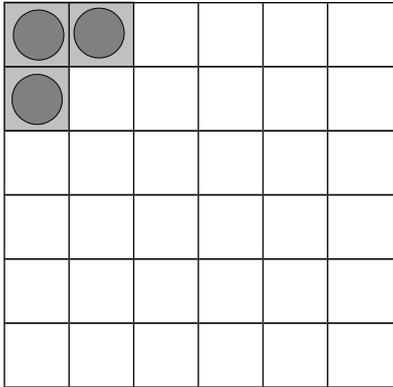


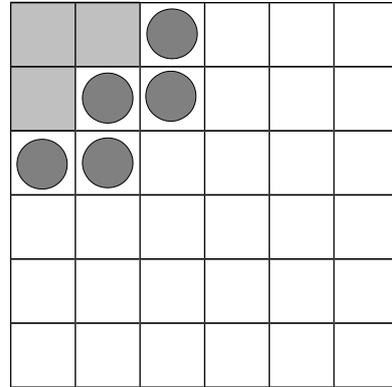
Devoir Maison

Introduction : Le but de l'exercice est d'étudier avec des outils mathématiques, un jeu de dame légèrement modifié qui se joue seul, et dont nous présentons les règles :

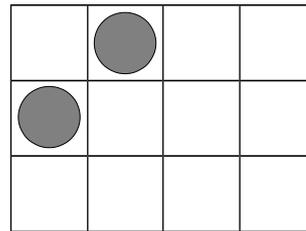
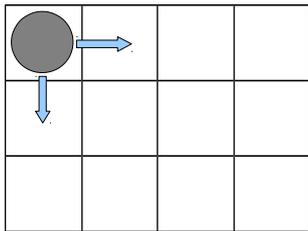
- Il y a un damier, des pions placés au début dans une zone "prison" (grisée sur la figure).



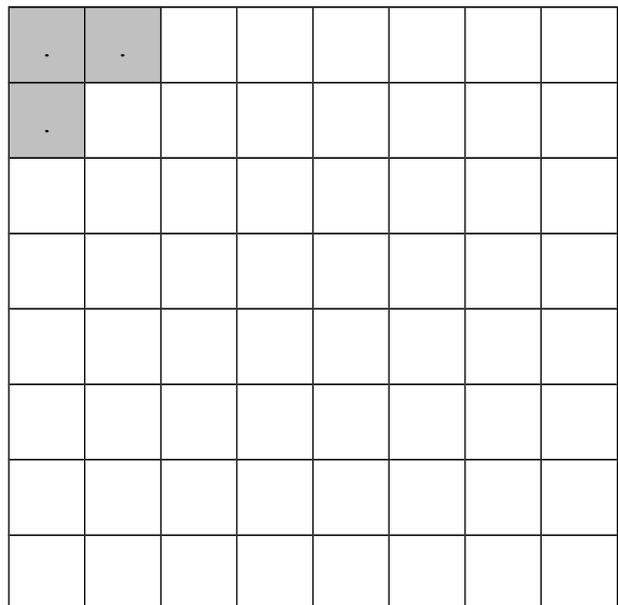
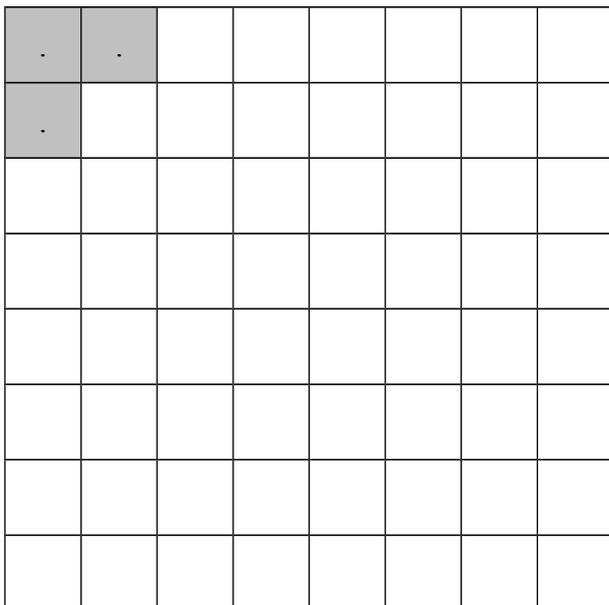
- Le but est de libérer tous les pions de la zone prison (de nouveaux pions peuvent apparaître).



- Le déplacement des pions est particulier : lorsqu'un pion est déplacé, il se dédouble en créant un pion à sa droite et un pion en dessous de sa position de départ. Il n'est pas possible de reculer et on ne peut pas "sauter" par dessus un autre pion.



Avant de commencer : En utilisant les grilles ci-dessous, essayez différentes stratégies au crayon, en commençant avec 3 pions en prison. Attention, ça n'est pas aussi simple qu'il y paraît...

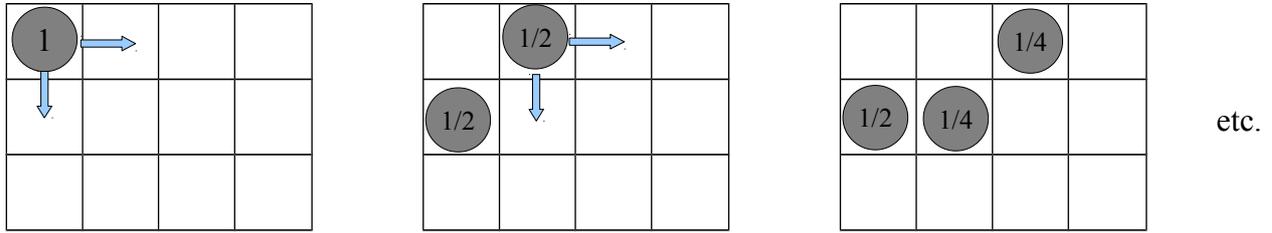


Il est possible de télécharger une version jouable à l'adresse : <http://tinyurl.com/dames-cailloux>

En fait, il est vain de s'entêter trop longtemps à jouer à ce jeu car, avec cette situation de départ (3 pions dans la prison), il n'est pas possible de gagner. Le but de ce devoir est de le prouver.

La première étape du raisonnement consiste à attribuer un "poids" à chacun des pions. À chaque fois qu'un pion est déplacé, le poids est divisé par deux et réparti dans les deux pions créés de sorte que le poids total ne change pas au cours du jeu.

Par exemple, si on déplace un pion qui pèse 1, les deux pions créés pèseront $\frac{1}{2}$ et ainsi de suite :



Situation de départ : Pour les trois pions de départ, nous choisissons les poids suivants (voir figure):

- 1 pour celui dans le coin
- $\frac{1}{2}$ pour les deux autres (nous raisonnons comme si ils provenaient du déplacement d'un pion de poids 1)

Exercice :

1) Justifier qu'à n'importe quel tour de jeu, le poids cumulé des pions présents sur le damier vaut 2.

2) Placez sur chaque case du damier ci-contre, le poids qu'aura un pion en atteignant cette case. Ecrire les poids sous forme de fractions.

	0	1	2	3	4	5	...
a	1	1/2
b	1/2
c
d
e
f

3) On considère que le damier peut se prolonger infiniment vers la droite et vers la bas.

On pose (a_n) la suite des poids que chaque case peut accueillir sur la première ligne (ligne a) du damier ($a_0=1$, $a_1=1/2$, etc.)

a) Quelle est la nature de la suite (a_n) et quels sont ses éléments caractéristiques ?

b) On place 5 pions sur les premières cases de la ligne a. Calculer le poids cumulé de ces pions.

Même question avec 10 pions, puis avec n pions.

c) On appelle « capacité d'accueil limite » d'une ligne le poids cumulé de tous les pions si ils remplissaient la ligne entièrement. Quel est la capacité d'accueil limite de la ligne a ? La réponse est attendue sous forme de limite de suite. Compléter la figure (à droite de la ligne a).

4) a) La deuxième ligne (ligne b) est assez similaire à la première. En déduire directement quel est la capacité d'accueil de la deuxième ligne et compléter la figure.

b) Même question avec les lignes c, d, e et f. Compléter la figure

5) On pose (p_n) la suite des capacités d'accueil de chaque ligne. p_0 correspond à la ligne a (question 3c), p_1 à la ligne b (question 4a), etc.

a) Quelle est la nature de la suite (p_n) et quels sont ses éléments caractéristiques.

b) En déduire la capacité d'accueil cumulée des n premières lignes.

c) En déduire la capacité d'accueil du damier entier. La réponse est attendue sous forme de limite.

6) On admet ici que le damier a une capacité d'accueil de 4.

a) Quel sont les capacités d'accueil de la zone prison et de la zone libre ?

b) Pour gagner à ce jeu, il faut faire passer tous les pions en zone libre. En utilisant la question 1) et la question précédente, justifier qu'il n'est pas possible de gagner.

7) La conclusion reste-t-elle la même pour toute situation de départ ? Justifier.